

PEDAQOGİKA

UOT:37.

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ АСПЕКТ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ
ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ В ЭЛЕКТРОННОМ ОБУЧЕНИИ

Асланова Натиға Шикар
Гянджинский Государственный Университет
natiga.cabbarova@mail.ru

Аннотация: При преподавании некоторых вопросов алгебры средствами электронного обучения рассматриваются вопросы о построении таких многочленов, которые принимают значения доста точно близкие к нулю в данной точке. Такие задачи могут появиться в различных формах. К таким задачам с большим успехом применяется LLL алгоритм, с использованием компьютерных методов. Особого внимания заслуживают онлайн среды типа Sage.

Açar sözlər: LLL alqoritnm, elektron təlim, ortoqonallaşdırma prosesi, qəfəs, bazis.

Key words: LLL algorithm, electronic learning, orthogonalization, lattice, basis.

Ключевые слова: LLL алгоритм, электронное обучение, процесс, решетка, ортогонализации, базис.

Отправной точкой LLL алгоритма является процесс ортогонализации Грама Шмидта. Пусть в пространстве R^n задан некоторый базис $b_1, b_2, \dots, b_n$. Процесс ортогонализации состоит в построении нового базиса $b_1^*, b_2^*, \dots, b_n^*$, который определяется при помощи равенств:

$$b_i^* = b_i - \sum_{j < i} \mu_{i,j} b_j^*, b_1^* = b_1$$

при этом,

$$\mu_{i,j} = \frac{b_i \cdot b_j^*}{b_j^* \cdot b_j^*}.$$

Базис решетки с такими свойствами существует и называется LLL приведенным базисом. Такой базис обладает рядом важных свойств, которые привели к важным приложениям в разных областях алгебры и теории чисел. Такой базис является "почти ортогональным" и состоит из "коротких" векторов. Процесс построения такого базиса носит название LLL алгоритма и представляет собой процедуру, требующую огромного количества вычислений. В приложениях часто этот процесс выполняется компьютерными методами, которые занимают приемлемую долю (т. н. полиномиальное количество) машинного времени. Это процедура в среде Sage носит обозначение LLL.

Приведем пример построения LLL приведенного базиса при помощи Sage. Пусть задана решетка с базисом (он будет целым) $[5, 2, -6], [1, 4, -3], [2, 3, 0]$. В окне Sage вводим следующие команды:

sage: X = matrix(ZZ, [[5, 2, -6], [1, 4, -3], [2, 3, 0]])

sage: Y = X.LLL() ; Y

Sage возвращает базис: $[1 -1 3], [2 3 0], [4 -2 -3]$.

В настоящей работе рассматривается вопрос о приближении действительных чисел квадратичными иррациональностями вида

$$(a + b\sqrt{c})/d,$$

где a, b, c, d целые числа $c > 0, d > 0$. Такие иррациональности простейшие и очень просто

выполнять над ними четырех арифметических операций и возведение в степень. Поэтому, зачастую удобно оперировать над ними, чем над десятичными дробями с

большим количеством десятичных цифр. Процесс построения такого приближения основывается на построении многочлена второй степени с целыми коэффициентами которое принимает значение близкие к нулю с достаточной степени точности. Метод построение такого многочлена основывается на LLL алгоритм. В среде Sage этот алгоритм дается следующими кодами:

```
sage: def myalgdep(a, d, K = 10u):
sage: aa = [floor(K * ai) for i in range(d+1)]
sage: A = identity_matrix(ZZ, d+1)
sage: B = matrix(ZZ, d+1, 1, aa)
sage: A = A.augment(B)
sage: L = A.LLL()
sage: v = L[0][:-1].list()
sage: return ZZ['x'](v).
```

Здесь a -данное число, d -степень искомого многочлена, 10^{-u} требуемая точность приближения. Например, если требуется построить многочлен с целыми коэффициентами 3-й степени приближающий 0 в точке $a = 0.234256$ с точностью 10^{-6} мы пишем:

```
sage: a = 0.234256
sage: myalgdep(a, 3, 106)
Sage выдает ответ:  $-7 * x^3 - 22 * x^2 - 3 * x + 2$ .
```

Чтобы использовать эту процедуру для приближения чисел квадратичными иррациональностями нужно ввести $d=2$. Например, приблизим число $a=0.141$ квадратичными иррациональностями рассмотренного выше. Используя Sage, вводим:

```
sage: def myalgdep(a, d, K):
sage: aa = [floor(K * ai) for i in range(d+1)]
sage: A = identity_matrix(ZZ, d+1)
sage: B = matrix(ZZ, d+1, 1, aa)
sage: A = A.augment(B)
sage: L = A.LLL()
sage: v = L[0][:-1].list()
sage: return ZZ['x'](v)
```

```
sage: a=0.141
sage: myalgdep(a,2,108)
Находим многочлен:  $42 * x^2 + 65 * x - 10$ .
```

Поэтому, $a \approx (-65 + \sqrt{5905})/84 \approx 0.140999973973$.

Построим приближение для числа e . После ввода кодов

```
sage: def myalgdep(a, d, K):
sage: aa = [floor(K * ai) for i in range(d+1)]
sage: A = identity_matrix(ZZ, d+1)
sage: B = matrix(ZZ, d+1, 1, aa)
sage: A = A.augment(B)
sage: L = A.LLL()
sage: v = L[0][:-1].list()
sage: return ZZ['x'](v)
```

```
sage: a=2.718281828
sage: myalgdep(a,2,1010)
sage выдает многочлен  $-744 * x^2 + 1759 * x + 716$ .
Поэтому,  $a \approx (1759 + \sqrt{5224897})/1488 \approx 2, 71828182787$ .
```

Рассмотрим приближение числа π .

```
sage: def myalgdep(a, d, K):
```

```
sage: aa = [floor(K * ai) for i in range(d+1)]
sage: A = identity_matrix(ZZ, d+1)
sage: B = matrix(ZZ, d+1, 1, aa)
sage: A = A.augment(B)
sage: L = A.LLL()
sage: v = L[0][:-1].list()
sage: return ZZ['x'](v)
sage: a=math.pi
sage: myalgdep(a,2,1010)
Получим многочлен
 $245 * x^2 - 71 * x - 2195$ ,
который дает приближение
 $\pi \approx (71 + \sqrt{2156141})/490 \approx 3.1415926537$ .
Рассмотрим приближение числа  $\sqrt[3]{7}$ .
sage: def myalgdep(a, d, K):
sage: aa = [floor(K * ai) for i in range(d+1)]
sage: A = identity_matrix(ZZ, d+1)
sage: B = matrix(ZZ, d+1, 1, aa)
sage: A = A.augment(B)
sage: L = A.LLL()
sage: v = L[0][:-1].list()
sage: return ZZ['x'](v)
sage: a=1.912931182772
sage: myalgdep(a,2,1010)
Получим многочлен:
 $-1295 * x^2 + 6032 * x - 6800$ .
Отсюда следует приближенное равенство:
 $\sqrt[3]{7} \approx (-6032 + \sqrt{71609024})/-2590 \approx 1.91293118277$ .
```

Литература

1. А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. Москва: Наука, 1975. 432 с.
2. P. Zummerman and others. Computational Mathematics with SageMath.
<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.en>.

SCIENTIFIC- RESEARCH ASPECT FOR THE TEACHING OF THE THEME ORTHOGONALIZATION IN E-LERNING

*Aslanova Natiga Shikar
Summary*

In the teaching of the theme orthogonalization they are possible to consider some questions of scientific-research character. Consideration of these problems leads to deep understanding of some questions connected with the notion of orthogonal basis. These problems are available for studying with LLL algorithm.

ELEKTRON TƏLİMDƏ ORTOQONALLAŞDIRMA PROSESİ MÖVZUSUNUN TƏDRİSİNİN ELMI-TƏDQIQAT XARAKTERLİ MƏSƏLƏLƏRİ

*Aslanova Natiqə Şikar qızı
Xülasə*

Ortoqonallaşdırma prosesi mövzusunun tədrisində elmi –tədqiqat xarakterli bəzi məsələlər meydana gəlir. Belə məsələlərin öyrənilməsi ortoqonallaşdırma mövzusunun daha dərinlən qavramağa yardım edir. Belə məsələlərin həlli LLL alqoritm deyilən üsulla kompüterin köməyi ilə müvəffəqiyyətlə həll olunur.

*Rəyçi: dosent Cabbarov İlqar Şikar oğlu
İnformatika və Cəbr kafedrasının 26 yanvar 2023-cü il tarixli iclasın 04 sayılı protokolu
Daxi olma tarixi 31 yanvar 2023-cü il*