

RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA

УДК:51.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМЫ ШТУРМА ОПИСЫВАЮЩЕЙ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ С УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННЫМ КОНЦОМ

к.м.н. Кулиева Севиндж Бакир
Гянджинский Государственный Университет
bakirovna89@mail.ru

Аннотация: В статье изучаются свойства собственных значений и собственных функций спектральной задачи

$$\begin{aligned} y^{(4)}(x) - (q(x)y'(x))' &= \lambda y(x), \quad 0 < x < 1, \\ y(0) &= 0, \quad y'(0) = 0, \\ y''(1) - (a_1\lambda + b_1)y'(1) &= 0, \quad Ty(1) - a_2\lambda y(1) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $b_1 \neq 0$. При $b_1 < 0$ эта задача описывает изгибные колебания однородного стержня с постоянной жесткости, в сечениях которой действует продольная сила, левый конец которой заделан, а правый конец упруго закреплен и на этом конце действует следящая сила и сосредоточен инерционный груз.

Açar sözlər: məxsusi ədədlər, məxsusi funksiyalar, spektral məsələ, izləyici qüvvə, inersial yük.

Ключевые слова: собственные значения, собственные функции, спектральная задача, следящая сила, инерционный груз.

Key words: properties of eigenvalues, properties of eigenfunctions, spectral problem, force acts, inertial load

Рассмотрим изгибные колебания однородной балки с постоянной жесткостью, в сечениях которой действует продольная сила, левый конец которой заделан, а правый конец упруго закреплен и на этом конце сосредоточен инерционный груз. Тогда краевые условия записываются в следующем виде

$$\begin{aligned} W(0, t) &= 0, \quad \frac{\partial W(0, t)}{\partial X} = 0, \\ EJ \frac{\partial^2 W(L, t)}{\partial X^2} + c_2 \frac{\partial W(L, t)}{\partial X} &= -I \frac{\partial^3 W(L, t)}{\partial X \partial t^2}, \\ EJ \frac{\partial^3 W(L, t)}{\partial X^3} - \bar{Q}(L) \frac{\partial W(L, t)}{\partial X} &= M \frac{\partial^2 W(L, t)}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Вводя обозначение $x = \frac{X}{L}$ и $w = \frac{W}{L}$ запишем краевые условия в виде

$$\begin{aligned} w(0, t) &= 0, \quad \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial^2 w(1, t)}{\partial x^2} + \frac{c_1 L}{EJ} \frac{\partial w(1, t)}{\partial x} &= -\frac{IL}{EJ} \frac{\partial^3 w(1, t)}{\partial x \partial t^2}, \\ \frac{\partial^3 w(1, t)}{\partial x^3} - Q(1) \frac{\partial w(1, t)}{\partial x} &= \frac{ML^3}{EJ} \frac{\partial^2 w(1, t)}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

Учитывая $\lambda = \rho FL^4 \omega^2 / EJ$ с помощью заменой $w(x, t) = y(x) \cos \omega t$ эти граничные условия сводятся к следующим граничным условиям

$$y(0) = y'(0) = 0,$$

$$y''(1) - (a_1\lambda + b)y'(1) = 0,$$

$$Ty(1) - a_2\lambda y(1) = 0,$$

где $b_1 = -\frac{c_1 L}{EJ} < 0$. Таким образом, рассматриваемая нами задача об изгибных колебаниях стержня сводится к спектральной задаче и изучаются свойства собственных значений и собственных функций этой задачи

$$\begin{aligned} y^{(4)}(x) - (q(x)y'(x))' &= \lambda y(x), \quad 0 < x < 1, \\ y(0) &= 0, \quad y'(0) = 0, \\ y''(1) - (a_1\lambda + b_1)y'(1) &= 0, \quad Ty(1) - a_2\lambda y(1) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $b_1 \neq 0$.

Лемма 1. При изменении $\lambda \leq 0$ функции $y(x, \lambda)$ и $y'(x, \lambda)$ только тогда могут потерять нули или приобрести новые, если они войдут внутрь интервала $(0, 1)$ или выйдет оттуда через краевую точку $x = 0$.

Рассмотрим следующую спектральную задачу

$$\begin{aligned} \ell(y)(x) &= \lambda y(x), \quad 0 < x < 1, \\ y(0) &= y'(0) = y''(0) = Ty(1) - a_2\lambda y(1) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Лемма 2. Существует $\zeta < 0$ такое, что все вещественные собственные значения μ_n , $n = 1, 2, \dots$, краевой задачи (2) являются простыми, лежат на луче $(-\infty, \zeta)$, образуют неограниченно убывающую последовательность, имеют индекс осцилляции 1 и допускают асимптотику $\mu_n = -4(\pi n + \pi/2)^4 + o(n^4)$.

Пусть $\lambda < 0$ и $i(\mu_n)$ – индекс осцилляции собственного значения μ_n , $n \in \mathbb{N}$, задачи (2). Тогда имеет место

$$s(\lambda) = \tau(\lambda) = \sum_{\mu_n \in (\lambda, 0)} i(\mu_n). \quad (3)$$

Определим $N_1 \in \mathbb{N}$ из неравенства $\lambda_{N_1-1}(\pi/2) < -b_1/a_1 \leq \lambda_{N_1}(\pi/2)$.

Теорема 1. Собственные значения задачи (1) являются вещественными, простыми и образуют неограниченно возрастающую последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $\lambda_n > 0$ при $n \geq 2$. Соответствующие им собственные функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots$ и их производные обладают следующими осцилляционными свойствами: I) если $N_1 = 1$, то функции $y_1(x)$ и $y'_1(x)$ не имеют нулей в случае $\lambda_1 \geq 0$, имеют $\sum_{\mu_n \in (\lambda_1, 0)} i(\mu_n)$ простых нулей в случае $\lambda_1 < 0$, функция $y_n(x)$ при $n \geq 2$ имеет либо $n-2$, либо $n-1$ простых нулей, а функция $y'_n(x)$ имеет в точности $n-1$ простых нулей в $(0, 1)$; II) если $N_1 > 1$, то функция $y_n(x)$ при $n < N_1$ имеет в точности $n-1$ простых нулей, при $n \geq N_1$ имеет либо $n-2$, либо $n-1$ простых нулей, а функция $y'_n(x)$ имеет в точности $n-1$ простых нулей в $(0, 1)$.

Лемма 3. Справедлива формула

$$\frac{dG}{d\lambda} = -\frac{1}{y'^2(1, \lambda)} \left\{ \int_0^1 y^2(x, \lambda) dx - a_2 y^2(1, \lambda) \right\}, \lambda \in K. \quad (4)$$

Лемма 4. *Имеет место соотношение* $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} G(\lambda) = +\infty$. (5)

Доказательство. Напомним, что корни уравнения $G(\lambda) = a_1 \lambda + b_1$ являются собственными значениями задачи (1) и наоборот. Так как $a_2 < 0$, то из лемм (3) и (4) следует, что $G(\lambda) = \frac{y''(1, \lambda)}{y'(1, \lambda)}$ является непрерывной убывающей функцией в каждом из интервалов $K_n = (\lambda_{n-1}(0), \lambda_n(0))$, $n = 1, 2, \dots$, и справедливы соотношения

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{n-1}(0)+0} G(\lambda) = +\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n(0)-0} G(\lambda) = -\infty.$$

Следовательно, каждое значение из $(-\infty, +\infty)$ функция $G(\lambda)$ принимает в единственной точке интервала K_n , $n = 1, 2, \dots$. В силу условия $q(x) > 0$, $x \in [0, 1]$, $a_1 > 0$, $a_2 < 0$, функция $D(\lambda) = a_1 \lambda + b_1$ строго возрастает в интервале $(-\infty, +\infty)$. Из этих рассуждений следует, что в каждом интервале $(\lambda_{n-1}(0), \lambda_n(0))$, $n = 1, 2, \dots$, уравнение

$$G(\lambda) = D(\lambda)$$

имеет единственное решение $\lambda = \lambda_n$, т.е. выполняется граничное условие $y''(1) - a_1 \lambda y'(1) = 0$. Следовательно, $\lambda_n, n \in \mathbb{N}$, является $(n - m)$ собственным значением краевой задачи (1), а $y_n(x) = y(x, \lambda_n)$ является соответствующей собственной функцией.

Из лемм (3), (4) и

$$G(0) = \frac{y''(1, 0)}{y'(1, 0)} > 0.$$

$$\lambda_1 \left(\frac{\pi}{2} \right) < \lambda_1(0) < \lambda_2 \left(\frac{\pi}{2} \right) < \lambda_2(0) < \dots$$

следует, что $G(\lambda) > 0$ при $\lambda \in (\lambda_{n-1}(0), \lambda_n(\pi/2))$, $G(\lambda_n(\pi/2)) = 0$, $G(\lambda) < 0$ при $\lambda \in (\lambda_n(\pi/2), \lambda_n(0))$, $n \in \mathbb{N}$.

Так как $a_1 > 0$, то $D(\lambda) > 0$ при $\lambda < -\frac{b_1}{a_1}$, $D\left(-\frac{b_1}{a_1}\right) = 0$, $D(\lambda) < 0$ при $\lambda > -\frac{b_1}{a_1}$.

Следовательно, мы получаем следующие соотношения:

$$\lambda_n \in (\lambda_n(\pi/2), \lambda_n(0)] \quad \text{при} \quad n < N_1, \quad \lambda_n \in (\lambda_{n-1}(0), \lambda_n(\pi/2)] \quad \text{при} \quad n \geq N_1. \quad (6)$$

Кроме того, имеем $\lambda_1 < 0$ при $b_1 > G(0)$, $\lambda_1 = 0$ при $b_1 = G(0)$, $\lambda_1 > 0$ при $b_1 < G(0)$. (7)

Теорема*. *Функции $y(x, \lambda)$ и $y'(x, \lambda)$ обладают следующими осцилляционными свойствами: если $\lambda \in (0, \lambda_1(0)]$, то $\tau(\lambda) = s(\lambda) = 0$, если $\lambda \in (\lambda_{n-1}(0), \lambda_n(\pi/2))$ и $n \geq 2$, то либо $\tau(\lambda) = n - 2$, либо $\tau(\lambda) = n - 1$, а если $\lambda \in [\lambda_n(\pi/2), \lambda_n(0)]$ и $n \geq 2$, то $\tau(\lambda) = n - 1$, если $\lambda \in (\lambda_{n-1}(0), \lambda_n(0)]$ и $n \geq 2$, то $s(\lambda) = n - 1$.*

Теперь утверждения I) и II) теоремы следует из теоремы (*) с учетом соотношений (6) и (7). Доказательство теоремы завершено.

Заметим, что задача (1) сводится к задаче на собственные значения для

самосопряженного оператора $\tilde{L}$ в гильбертовом пространстве $H = L_2(0, 1) \oplus C^2$ со скалярным произведением $(\hat{y}, \hat{g}) = (\{y, m, k\}, \{g, s, t\}) = (u, g)_{L_2} + |a_1|^{-1} m \bar{s} + |a_2|^{-1} k \bar{t}$, где оператор $\tilde{L}$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{L}\hat{y} &= L\{y, m, k\} = \{(Ty)'(x), y''(1) - b_1 y'(1), Ty(1)\}, \\ D(\tilde{L}) &= \{\hat{y} = \{y(x), m, k\} \in H : y(x) \in W_2^4(0, 1), (Ty)'(x) \in L_2(0, 1), \\ & y(0) = y'(0) = 0, m = a_1 y'(1), k = a_2 y(1)\}.\end{aligned}$$

Замечание. Из асимптотической формулы: $\sqrt{\lambda_n} = (n - 3/2)\pi + O(1/n)$, следует, что существует натуральное число $\tilde{n} \geq 2$ такое, что при $n \geq \tilde{n}$ функция $y_n(x)$ имеет ровно $n-2$ простых нулей в интервале $(0, 1)$. Очевидно, что $\tilde{n} > N_1$.

Теорема 2. Пусть r, l ($r \neq l$) – произвольные фиксированные натуральные числа. Если $b_1 < 0, N_1 > 1, r < N_1$ и $l \geq \tilde{n}$, либо $b_1 > 0, r = 1$ и $l \geq \hat{n}$, то система $\{y_n(x)\}_{n=1, n \neq r, l}^\infty$ образует базис в $L_p(0, 1)$, $1 < p < \infty$ (безусловный базис при $p = 2$).

Литература

1. Алиев З.С., Агаев Э.А. Осцилляционные свойства собственных функций вполне регулярных систем Штурма 4-го порядка // – Москва: Доклады Российской Академии Наук, –2014. т. 459, № 1.
2. Алиев, З.С., Дуньямалиева, А.А. Дефектная базистность системы корневых функций задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях // – Москва: Дифф. урав., – 2015. т. 51, № 10.
3. Амара, Ж. Бен, Шкаликов, А.А. Задача Штурма-Лиувилля с физическим и спектральным параметрами в граничном условии // – Москва: Матем. зам., – 1999. т. 6, № 2.
4. Амара, Ж.Бен, Владимиров, А.А. Об осцилляции собственных функций задачи 4-го порядка со спектральным параметром в граничном условии // – Москва: Фундаментальная и прикладная математика, – 2006г. т. 12, № 4.
5. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти томах. Т. 1. Колебания механических систем / И.И. Артоболевский, А.Н. Боголюбов, В.В. Болотин [и др.]. – Москва: Машиностроение
6. Азизов, Т.Я., Иохвидов, И.С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой / Т.Я. Азизов, И.С. Иохвидов. – Москва: Наука, – 1986г.
7. Капустин, Н.Ю. О спектральной задаче из математической модели процесса крутильных колебаний стержня со шкивами на концах // – Москва: Дифф. урав., – 2005. т. 41, № 10.
8. Капустин, Н.Ю. Осцилляционные свойства решений одной несамосопряженной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // – Москва: Дифф. урав., – 1999. т. 35, № 8.
9. Керимов Н.Б., Поладов Р.Г. Базисные свойства системы собственных функций задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях // – Москва: Доклады Российской Академии Наук, – 2012. т. 442, № 1.
10. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. – Москва: Наука, – 1969г.
11. Aliyev, Z.S., Agayev, E.A. Structure of the root subspace and the oscillation properties of

the eigenfunctions of completely regular Sturmian system // – Baku: Proc. IMM NAS Azerb., – 2014. v. 40, № 1, – p. 36–43.

12. Amara, J. B. Fourth-order spectral problem with eigenvalue in the boundary conditions // North-Holland Mathematics Studies, – 2004. v. 197, – p. 49–58.

13. Amara, J. B. Sturm theory for the equation of vibrating beam // J. Math. Anal. Appl., – 2009. v. 349, no. 1, – p. 1–9.

14. Banks, D.O., Kurowski J.G. A Prufer transformation for the equation of a vibrating beam subject to axial forces // J. Differential Equations, – 1977. v. 24, no. 1, – p. 57–74.

15. Birkhoff, G.D. Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations // Trans. AMS, – 1908. v. 9, no. 4, – p. 373–395.

16. Walter, J. Regular eigenvalue problems with an eigenvalue parameter in boundary conditions // Math. Zeit., – 1973. v. 133 – p. 301–312.

ŞTURM SİSTEMLƏRİ İLƏ TƏSVİR OLUNAN BİR UCU BƏRKİDİLMİŞ ÇUBUĞUN ƏYİLMƏ RƏQSLƏRİNİN SPEKTRAL XASSƏLƏRİ

Quliyeva Sevinc Bakir

Xülasə

Məqalədə

$$\begin{aligned} y^{(4)}(x) - (q(x)y'(x))' &= \lambda y(x), \quad 0 < x < 1, \\ y(0) &= 0, \quad y'(0) = 0, \\ y''(1) - (a_1\lambda + b_1)y'(1) &= 0, \quad Ty(1) - a_2\lambda y(1) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

spektral məsələsinin məxsusi ədədlərinin və məxsusi funksiyalarının xassələri öyrənilir, burada $b_1 \neq 0$. $b_1 < 0$ olduqda bu məsələ bir ucu bərkidilmiş, digər ucu elastiki bərkidilmiş və bu ucu inersial yük olan və izləyici qüvvə təsir edən, en kəsiklərində isə uzununa qüvvə təsir edən Eyler-Bernulli çubuğunun əyilmə (eninə) rəqslərini təsvir edir.

SPECTRAL PROPERTIES OF BENDING VIBRATIONS OF A ROD FIXED AT ONE END AS DESCRIBED BY STURM SYSTEMS

Guliyeva Sevinch Bakir

Summary

In work, we study the properties of eigenvalues and eigenfunctions of the spectral problem

$$\begin{aligned} y^{(4)}(x) - (q(x)y'(x))' &= \lambda y(x), \quad 0 < x < 1, \\ y(0) &= 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(1) - (a_1\lambda + b_1)y'(1) = 0, \quad Ty(1) - a_2\lambda y(1) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

where $b_1 \neq 0$. In case $b_1 < 0$, this problem describes the bending vibrations of a homogeneous rod with a constant stiffness, in the cross-sections of which a longitudinal force acts, the left end of which is fixed, and the right end is elastically fixed, and at this end an inertial load is concentrated and a tracking force acts.

Rəyçi: dos. Salmanova Gunay

İnformatika və Cəbr kafedrasının 07 noyabr 2024-cü il tarixli iclasın 03 sayılı protokolu

Daxil olma tarixi 15 dekabr 2024-cü il