

UOT: 518.2

SOBOLEV FƏZALARI VƏ ONUN TƏTBİQLƏRİ

Dosent Neymətov Nazim Əsədulla oğlu

Gəncə Dövlət Universiteti

nneymatov@yandex.ru

Xülasə: Çoxdəyişənli diferensiallanan funksiyalar fəzalarının qurulması, onların müxtəlif xassələrinin araşdırılması və bu fəzalarda daxilolma teoremləri tipli bir sıra integral bərabərsizliklərinin isbat olunması ilə bağlı məsələlər çoxluğu, riyazi analizin sərbəst şəkildə inkişaf edərək “fəzalar nəzəriyyəsi” adını almış bölməsinə aiddir. Çoxdəyişənli diferensiallanan funksiyalar fəzalarının “daxilolma nəzəriyyəsi”, funksiyalar nəzəriyyəsi nöqtəyi-nəzərinə sərbəst inkişaf etməklə bərabər, həmçinin xüsusi törəməli diferensial tənliklər nəzəriyyəsinə çoxsaylı effektiv tətbiqlərə malik olan bir bölmədir. Funksional analizin inkişafı və xüsusi törəməli diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin tələbatları yeni tip funksional fəzaların araşdırılmasına gətirib çıxardı.

Açar sözlər: Funksiya, daxilolma teoremləri, metrik fəza, Banax fəzası, Hilbert fəzası.

Ключевые слова: Функция, теоремы вложения, метрическое пространство, Банахово пространство, Гильбертово пространство.

Key words: Function, embedding theorems, metric space, Banach space, Hilbert space

Çoxdəyişənli diferensiallanan funksiyalar sinfində klassik daxilolma teoremləri S.L.Sobolevin işlərində rast gəlinmişdir. O, 1938-ci ildə özünün daxil etdiyi müəyyən $G \in R^n$ oblastında diferensiallanan ümumiləşmiş törəmələri p -dərəcədə cəmlənən $W_p^{(l)}(G)$ funksiyalar fəzasını qurmuş və məlum daxilolma teoremlərini isbat etmişdir.

İndi həmin qurulmuş fəzalara baxaq.

1. $C^{(k)}(\Omega)$ fəzası. Tutaq ki, $\Omega \subset R^n$ sonlu oblastdır. $C(\Omega)$ ilə qapalı $\bar{\Omega}$ oblastında kəsilməz $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyalar çoxluğunu işarə edək. Burada iki funksiyanın cəmi və funksiyanın ədədə vurulması adi qaydada başa düşülür. Onda $C(\Omega)$ çoxluğu xətti fəza təşkil edir və burada norma

$$\|\varphi\|_{C(\Omega)} = \max_{x \in \bar{\Omega}} |\varphi(x)|$$

kimi təyin olunur. $C[a, b]$ fəzasında olduğu kimi isbat etmək olar ki, $C(\Omega)$ fəzası dolu separabel (əgər X metrik fəzasında hər yerdə sıx hesabi çoxluq tapmaq olarsa, belə metrik fəzaya *separabel* metrik fəza deyilir) fəza olur.

Tutaq ki, $\varphi(x)$ fəzası qapalı $\bar{\Omega}$ oblastında kəsilməz və Ω oblastında kəsilməz

$$\frac{\partial^l \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = l, l = 1, 2, \dots, k$$

törəmələri var və bu törəmələri Ω oblastının sərhəddinə qədər kəsilməz davam etdirmək olur. Onda deyirlər ki, $\varphi(x)$ funksiyanın qapalı $\bar{\Omega}$ oblastında k tərtibə qədər (k -da daxil olmaqla) kəsilməz törəməsi var. Belə $\varphi(x)$ funksiyalar çoxluğunu $C^{(k)}(\Omega)$ ilə işarə edək. Bu fəzada normanı

$$\|\varphi\|_{C^{(k)}(\Omega)} = \max_{0 \leq l \leq k} \left\{ \max_{x \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^l \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right| \right\}$$

kimi təyin edək. Onda $C^{(k)}(\Omega)$ separabel Banax fəzası olur.

2. $\tilde{W}_p^{(k)}(\Omega)$ fəzası. Tutaq ki, Ω oblastında k tərtibdən bütün $\omega_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{(k)}(x)$ ümumiləşmiş törəməsi olan $\varphi(x)$ funksiyası verilmişdir və

$$\varphi(x) \in L_p(\Omega'), \omega_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{(k)}(x) \in L_p(\Omega') (p \geq 1).$$

Bu funksiyalar çoxluğunu $\tilde{W}_p^{(k)}(\Omega)$ ilə işarə edək. İki funksiyanın cəmi və funksiyanın ədəd vurulmasını adi qaydada başa düşülür. $\tilde{W}_p^{(k)}(\Omega)$ fəzasında normanı

$$\|\varphi\|_{\tilde{W}_p^{(k)}(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |\varphi(x)|^p dx + \int_{\Omega} \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = k} \left| \frac{\partial^k \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|^p dx$$

kimi təyin edək. Burada cəm $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = k$ şərtini ödəyən bütün natural və sıfır qiymətləri alan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ədədləri üçün nəzərdə tutulur. Göstərilən norma mənada $\tilde{W}_p^{(k)}(\Omega)$ separabel Banax fəzası olur.

3. $\tilde{W}_p^{(k)}(\Omega)$ ($p \geq 1$) fəzası. Tutaq ki, $\varphi(x)$ funksiyanın $\Omega \subset R^n$ oblastında k tərtibə qədər (k -da daxil olmaqla) $\omega_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{(l)}(x)$ ($l = 1, 2, \dots, k$) ümumiləşmiş törəmələri var və $\varphi(x) \in L_p(\Omega)$, $\omega_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{(l)}(x) \in L_p(\Omega)$, ($l = 1, 2, \dots, k$). Bu şərti ödəyən $\varphi(x)$ funksiyalar çoxluğunu $W_p^{(k)}(\Omega)$ ilə işarə edək. Alınan fəzasında normanı

$$\|\varphi\|_{W_p^{(k)}(\Omega)}^p = \int_{\Omega} \sum_{l=0}^k \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = l} \left| \frac{\partial^l \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|^p dx$$

düsturu ilə təyin edək. Onda $W_p^{(k)}(\Omega)$ separabel Banax fəzası olur.

4. $\tilde{W}_p^{(k)}(\Omega)$ və $W_p^{(k)}(\Omega)$ fəzaları arasında əlaqə. Aydındır ki,

$$\tilde{W}_p^{(0)}(\Omega) = W_p^{(0)}(\Omega) = L_p(\Omega) \text{ və } \tilde{W}_p^{(1)}(\Omega) = W_p^{(1)}(\Omega).$$

Tutaq ki, $x_0 \in \Omega$ nöqtəsindən çıxan hər bir radius-vektor Ω oblastının sərhəddini ancaq bir nöqtədə kəsir. Onda Ω oblastı x_0 nöqtəsinə nəzərən ulduzlu oblast adlanır. Tutaq ki, Ω oblastında yerləşən elə U kürəsi var ki, Ω oblastı bu kürənin hər bir nöqtəsi üçün ulduzlu oblast olur. Onda Ω oblastı U kürəsinə nəzərən ulduzlu oblast adlanır. Tutaq ki, Ω oblastı sonlu sayda məhdud və hər biri müəyyən bir kürəyə nəzərən ulduzlu oblastların birləşməsindən ibarətdir. Belə oblastlar üçün $\tilde{W}_p^{(k)}(\Omega) = W_p^{(k)}(\Omega)$. Başqa sözlə $\varphi(x)$ funksiyanın k tərtibdən $\omega_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{(k)}(x)$ ümumiləşmiş törəməsinin olmasından onun k tərtibə qədər bütün tərtibdən $\omega_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{(l)}(x)$ ümumiləşmiş törəmələrinin olması alınır: $l = 1, 2, \dots, k$.

Qeyd edək ki, $p = 2$ olduqda $W_2^{(k)}(\Omega)$ Hilbert fəzası olur. Burada iki funksiyanın skalyar hasilı

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \sum_{l=0}^k \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = l} \frac{\partial^l \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \cdot \frac{\partial^l \psi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} dx$$

kimi təyin olunur.

Misal. Tutaq ki, $W_2^{(1)}(0, \pi)$ fəzasının *sint* və *t* funksiyaları arasında qalan bucağın cosinusunu tapmaq tələb olunur.

Həlli. $(x, y) = \|x\| \cdot \|y\| \cos \varphi$ olduğunu nəzərə alsaq

$$(x, y) = \int_0^\pi [rsint + 1 \cdot cost] dt = \pi,$$

$$\|x\|^2 = \int_0^\pi [\sin^2 t - \cos^2 t] dt = \pi,$$

$$\|y\|^2 = \int_0^\pi [t^2 + 1^2] dt = \frac{\pi}{3} + \pi = \pi \left(1 + \frac{\pi^2}{3}\right).$$

Buradan

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|} = \frac{\pi}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{1+\frac{\pi^2}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{3+\pi^2}}.$$

Ədəbiyyat

1. С.Л.Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинград, Из-во ЛГУ, 1950 г.
2. С.М.Никольский. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Москва, Из-во «Наука», 1977 г.
3. О.В.Бесов, В.П.Ильин, С.М.Никольский. Интегральные представления функций и теоремы вложения. Москва, Из-во «Наука», 1975 г.

ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Нейметов Назим Асадулла

Резюме

Множество вопросов, связанных с построением пространств многомерных дифференцируемых функций, исследованием их различных свойств и доказательством ряда интегральных неравенств типа теоремы вложения в этих пространствах, относится к разделу математического анализа, свободно развивающемуся и получившему название “теории пространств”. “Теория вложений” пространств многомерных дифференцируемых функций - это раздел, который, наряду со свободным развитием с точки зрения теории функций, также имеет множество эффективных приложений к теории дифференциальных уравнений в частных производных. Развитие функционального анализа и требования теории дифференциальных уравнений со специальными производными привело к исследованию функциональных пространств нового типа.

SOBOLEV SPACES AND ITS APPLICATIONS

Neymatov Nazim Asadulla

Summary

A lot of questions related to the construction of spaces of multidimensional differentiable functions, the study of their various properties and the proof of a number of integral inequalities such as the embedding theorem in these spaces belong to the section of mathematical analysis, which is freely developing and is called the “theory of spaces”. The “embedding theory” of spaces of multidimensional differentiable functions is a section that, along with free development from the point of view of function theory, also has many effective applications to the theory of partial differential equations. The development of functional analysis and the requirements of the theory of differential equations with special derivatives led to the study of a new type of functional spaces.

Rəyçi: r.e.d., dos.S.Q.Həsənov

Riyazi analiz kafedrasının 05 noyabr 2024-cü il tarixli iclasının 04 sayılı protokolu.

Daxil olma tarixi 10 yanvar 2025 ci il